Μάθημα 6ο

24/10/16

ΑΣΚΗΣΗ: Καμπύλη $C: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου s πληροί:
$C(0) = (1,1)$, $\vec{t}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Αν η καμπυλότητα της είναι $k(s) = 3$, $s \in \mathbb{R}$

Να βρεθεί η C.

ΛΥΣΗ: $K(s) = \dot{\varphi}(s)$, $\dot{C}(s) = \vec{t}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$

$\dot{\varphi}(s) = 3 \Rightarrow \int_0^s \dot{\varphi}(u)du = \int_0^s 3\, du \Rightarrow \varphi(s) - \varphi(0) = 3s \Rightarrow$

$\varphi(s) = \varphi(0) + 3s$

$\vec{t}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow (\cos\varphi(0), \sin\varphi(0)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Μπορώ να υποθέσω ότι $\varphi(0) = \pi/4 \Rightarrow \varphi(s) = 3s + \pi/4$.

$\dot{C}(s) = \left(\cos\left(3s + \pi/4\right), \sin\left(3s + \pi/4\right)\right) \Rightarrow \int_0^s \dot{C}(u)\, du = \left(\int_0^s \cos\underbrace{\left(3u + \pi/4\right)}_{A} du, \int_0^s \sin(A) du\right.$

Άρα: $C(s) - C(0) = \left(\frac{1}{3}\int_0^s \sin\left(3u + \frac{\pi}{4}\right)du, -\frac{1}{3}\int_0^s \left(\cos\left(3u + \frac{\pi}{4}\right)\right)du\right) =$

$$= \frac{1}{3}\left(\sin\left(3s+\frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{4} \,,\, -\cos\left(3s+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow c(s) = (1,1) + \frac{1}{3}\left(\sin\left(3s+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \,,\, -\cos\left(3s+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \Big(\underbrace{\ldots}_{x(s)} , \underbrace{\ldots}_{y(s)}\Big)$$

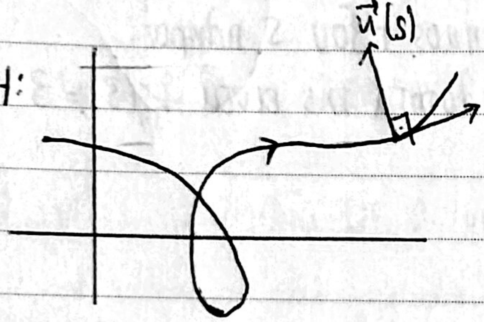
$$x(s) = \frac{1}{3}\sin\left(3s+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3\sqrt{2}} + 1$$

$$y(s) = -\frac{1}{3}\cos\left(3s+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3\sqrt{2}} + 1$$

$$\left(x + \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - 1\right)\right)^2 + \left(y + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)\right)^2 = \frac{1}{9}$$ κύκλος.

ΑΣΚΗΣΗ: Καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου έχει μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\vec{n}(s) = (-\sin s, \cos s)$. Να βρεθεί η καμπυλότητά της, και περιγράψτε γεωμετρικά την εικόνα της c.

ΛΥΣΗ:

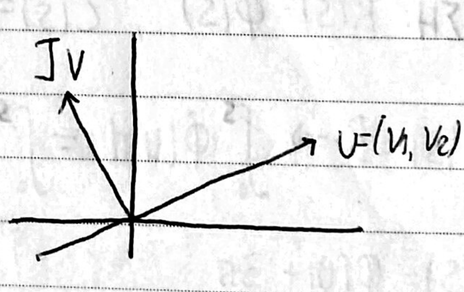


$\vec{t}(s) = \dot{c}(s)$

$\vec{n}(s) = J\vec{t}(s)$

$J: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,,\; J(v_1, v_2) = (-v_2, v_1)$

Εξισώσεις Frenet: $\dot{\vec{t}} = \kappa \vec{n} \;,\; \dot{\vec{n}} = -\kappa \vec{t}$ (1)



$\dot{\vec{n}}(s) = (-\cos s, -\sin s)$ (2)

$\vec{n}(s) = J\vec{t}(s) \Rightarrow J\vec{n}(s) = J^2\vec{t}(s) \xrightarrow{J^2 = -Id}$

$\Rightarrow J\vec{n}(s) = -\vec{t}(s) \Rightarrow (-\cos s, -\sin s) = -\vec{t}(s) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{t}(s) = (\cos s, \sin s)$ (3)

$J^2 v = J(Jv) \Rightarrow J^2 = -Id$

Από τις (1), (2), (3) έχω $(-\cos s, -\sin s) = -\kappa(s)(\cos s, \sin s) \Rightarrow \kappa(s) = 1 \;\; \forall s$

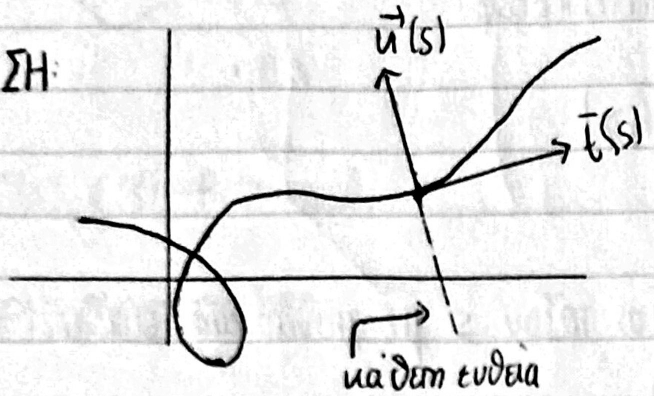
$\dot{c}(s) = \vec{t}(s) = (\cos s, \sin s) \Rightarrow \int_0^s \dot{c}(u)\,du = \left(\int_0^s \cos u\,du, \int_0^s \sin u\,du\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow c(s) = c(0) + \left(\int_0^s (\sin u)' du, -\int_0^s (\cos u)' du\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow c(s) = c(0) + (\sin s - \cos s + 1)$.

ΑΣΚΗΣΗ: Αν όλες οι κάθετες καμπύλες C διέρχονται από σημείο P_0, δείξτε ότι η C είναι τόξο κύκλου κέντρου P_0.

ΛΥΣΗ:



Υποθέτω ότι η C έχει παράμετρο το μήκος τόξου s. Η διανυσματική εξίσωση της καθέτου ευθείας στο s είναι $r = c(s) + \lambda \vec{n}(s)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Από υπόθεση έχω ότι $\forall s$, $\exists \lambda(s)$ ώστε $\boxed{P_0 = c(s) + \lambda(s)\vec{n}(s), \forall s}$

Πολλαπλασιάζω εσωτερικά με $\vec{n}(s)$: $\langle P_0, \vec{n}(s)\rangle = \langle c(s), \vec{n}(s)\rangle + \lambda(s)\langle \vec{n}(s), \vec{n}(s)\rangle$

$\Rightarrow \lambda(s) = \langle P_0, \vec{n}(s)\rangle - \langle c(s), \vec{n}(s)\rangle$

$\Rightarrow \lambda(s)$ είναι λεία.

Παραγωγίζω: $0 = \dot{c}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) + \lambda(s)\dot{\vec{n}}(s)$

$\Leftrightarrow 0 = \vec{t}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) - \lambda(s) \cdot k(s)\vec{t}(s) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = (1 - \lambda(s)k(s))\vec{t}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s)$

$\xrightarrow[\text{βάση}]{\{\vec{t}(s), \vec{n}(s)\}} \begin{cases} 1 - \lambda(s)k(s) = 0 \\ \dot{\lambda}(s) = 0 \end{cases}$, $\forall s \Rightarrow \lambda(s) =$ σταθερά

$\Downarrow$

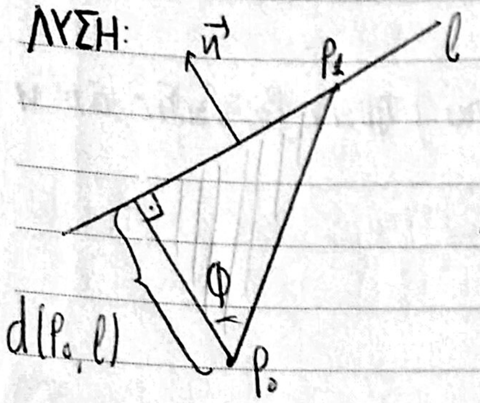
$k(s) = \dfrac{1}{\lambda} =$ σταθερά

Η καμπύλη είναι σίγουρα κύκλος.

$P_0 = c(s) + \overset{\text{αριθμός}}{\lambda}\vec{n}(s) \Rightarrow \|c(s) - P_0\| = \|-\lambda\vec{n}(s)\| \Rightarrow d(c(s), P_0) = |\lambda| =$ σταθ.

ΑΣΚΗΣΗ: Αν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες κανονικής καμπύλης C του $\mathbb{R}^2$ απέχουν από σταθερό σημείο P_0, σταθερή απόσταση, τότε η καμπύλη είναι κύκλος ή ευθεία

ΛΥΣΗ:

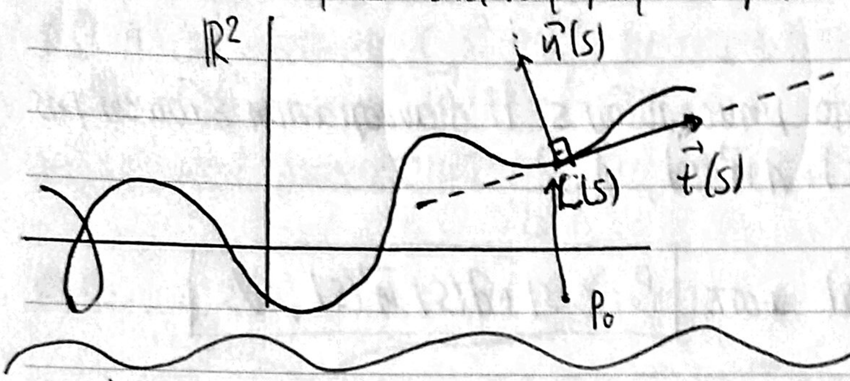


$$d(P_0,\ell) = \|\overrightarrow{P_0P_1}\|\cos\varphi$$

$$\langle \vec{n}, \overrightarrow{P_0P_1}\rangle = \|\vec{n}\|\cdot\|\overrightarrow{P_0P_1}\|\cos\varphi$$

$$d(P_0,\ell) = |\langle \vec{n}, \overrightarrow{P_0P_1}\rangle|$$

Υποθέτω ότι η C έχει παράμετρο το μήκος τόξου s με μοναδιαίο κάθετο $\vec{n}(s)$



Από υπόθεση έχω:

$f(s) = \langle \vec{n}(s), C(s)-P_0\rangle =$ σταθερά

$V(t), W(t)$ λείες διανυσματικές συναρτήσεις

$$\frac{d}{dt}\langle V(t), W(t)\rangle = \langle \frac{dV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{dW}{dt}\rangle.$$

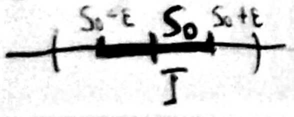
$$0 = \dot{f}(s) = \langle \vec{n}(s), C(s)-P_0\rangle^{\cdot} = \langle \dot{\vec{n}}(s), C(s)-P_0\rangle + \langle \vec{n}(s), \dot{C}(s)\rangle$$
$$= \langle -K(s)\vec{t}(s), C(s)-P_0\rangle + \cancel{\langle \vec{n}(s), \vec{t}(s)\rangle}^{\,0} \to$$

$$\Rightarrow K(s)\langle \vec{t}(s), C(s)-P_0\rangle = 0, \ \forall s.$$

$$\overbrace{\langle C(s)-P_0, C(s)-P_0\rangle^{\cdot}}^{=(\|C(s)-P_0\|^2)^{\cdot}} = 2\langle \dot{C}(s), C(s)-P_0\rangle = 2\langle \vec{t}(s), C(s)-P_0\rangle.$$

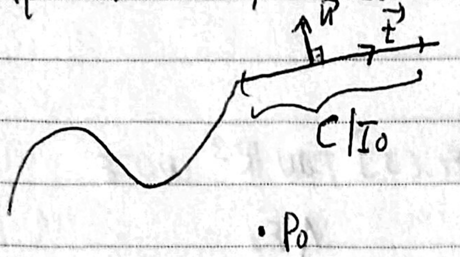
Ισχυρισμός: $\langle \vec{t}(s), C(s)-P_0\rangle = 0, \ \forall s\in I$

Έστω ότι $\exists s_0 \in I : \langle \vec{t}(s_0), C(s_0)-P_0\rangle \neq 0$



Η συνάρτηση $\langle \vec{t}(s), c(s)-P_0 \rangle$ είναι συνεχής. Άρα λόγω συνέχειας $\exists \varepsilon>0$ ώστε $I_0=(s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon) \subset I$ και $\langle \vec{t}'(s), c(s)-P_0 \rangle \neq 0$, $\forall s \in I_0$.

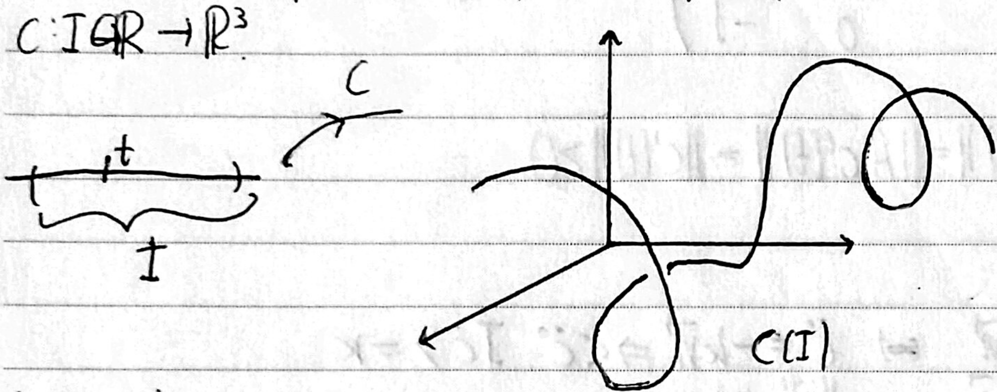
Άρα $\kappa(s)=0$, $\forall s \in I_0 \Rightarrow c|_{I_0}$ είναι ευθεία



$\langle \vec{n}(s), c(s)-P_0 \rangle =$ σταθ.

ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^3$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Καλούμε λεία (C^κ, $\kappa \geq 3$) καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ κάθε C^κ απεικόνιση $c: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.



$t =$ παράμετρος της c
$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα (ή διάνυσμα ταχύτητας) είναι το $c'(t) = \dfrac{dc(t)}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t))$

- Η c καλείται κανονική $\Leftrightarrow c'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$
- Αναπαραμετρήσεις, όπως στον $\mathbb{R}^2$
- Μήκος $L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| \, dt$

- Μήκος τόξου είναι η συνάρτηση $s: I \to \mathbb{R}$, $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| \, du$.

Γεωμετρικώς ισότιμες καμπύλες

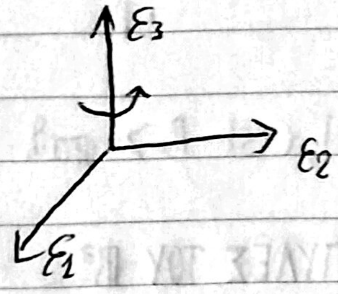
ΟΡΙΣΜΟΣ: Οι $c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^3$ καλούνται γεωμετρικώς ισότιμες ανν $\exists T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ ώστε $\tilde{c} = T \circ c$

$T \in Isom(\mathbb{R}^3) \Rightarrow T = T_v \circ A \, , \; A \in O(3)$

$\det A = \pm 1$

• $\det A = +1$ υπάρχει ορθομ. δεξιόστροφη βάση $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ του $\mathbb{R}^3$ ώστε ο πίνακας του A είναι

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



• $\det A = -1$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ ψευδοστροφές

$\tilde{c}'(t) = A c'(t) \Rightarrow \|\tilde{c}'(t)\| = \|A c'(t)\| = \|c'(t)\| > 0.$

$K(s) = \dot{\varphi}(s) \Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{t}} = k\vec{n} \\ \dot{\vec{n}} = -k\vec{t} \end{cases} \Leftrightarrow \ddot{c} = -k\vec{n} \Rightarrow \langle \ddot{c}, J\dot{c} \rangle = K$

$\|\ddot{c}\| = |k|$